

XXXI OLIMPIADA MATEMÁTICA REGIÓN DE MURCIA

ORGANIZA

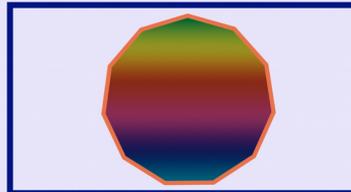
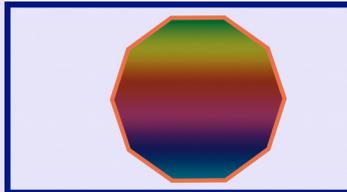
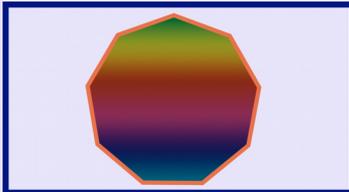
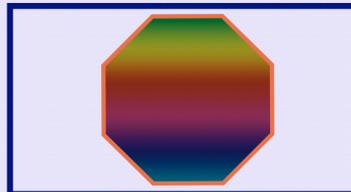
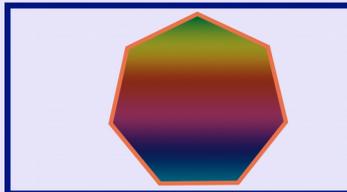
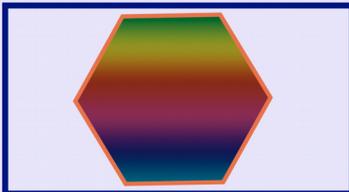
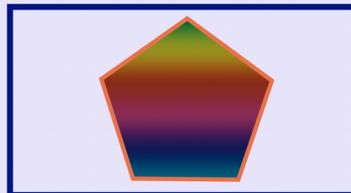
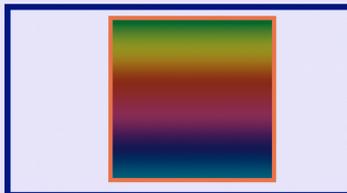
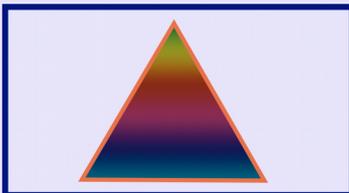


PATROCINA



PRIMERA FASE 6.º EP y 2.º ESO
Viernes, 16 de abril de 2021
Online en cada centro educativo

SEGUNDA FASE 6.º EP Y 2.º ESO



COLABORAN

Consejería de Educación y Cultura de la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia; Facultad de Matemáticas, Facultad de Educación y Departamento de Didáctica de las Ciencias Matemáticas y Sociales de la Universidad de Murcia; Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de la Universidad Politécnica de Cartagena; Ayuntamiento de Murcia; Centros educativos de la Región de Murcia.

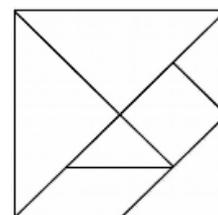
Cartel: Remedios Peña Quintana

PROBLEMAS PROPUESTOS Y SOLUCIONES - 2.ª FASE
Sexto curso de Primaria 15 de mayo de 2021

PROBLEMA 1

La figura representa un TANGRAM. Como puedes ver es un rompecabezas geométrico compuesto por 7 piezas: dos triángulos pequeños, un triángulo mediano, un cuadrado, un paralelogramo y dos triángulos grandes.

Las relaciones entre los tamaños de las diferentes piezas es tal que permite numerosas uniones entre ellas. **Dispones sobre tu mesa de un tangram como este.**



Apartado A

Te pedimos el área de cada uno de los distintos polígonos, que constituye el tangram sabiendo que el área del paralelogramo mide 16 cm^2 , así como el área del cuadrado que forman los siete polígonos.

SOLUCIÓN:

Una manera de hallar el área de todas las piezas es descomponiéndolas en triángulos iguales a uno de los triángulos pequeños.

Como se puede observar manipulando el tangram, el cuadrado, el triángulo mediano y el romboide equivalen a dos triángulos pequeños, luego tienen una superficie equivalente. Cada uno de los dos triángulos grandes se puede descomponer en dos triángulos medianos o en 4 triángulos pequeños, por lo que su superficie contiene 4 veces a la del triángulo pequeño.

Si el romboide tiene un área de 10 cm^2 , cada uno de los triángulos PEQUEÑOS que lo forman tendrá un área de 5 cm^2 .

La superficie del cuadrado que forma todas las piezas del tangram equivale a 16 triángulos pequeños. Luego su área será $5 \times 16 = 80 \text{ cm}^2$

Apartado B

Para medir el área del cuadrado que forman los siete polígonos juntos, se puede elegir una unidad de medida distinta del cm^2 . Te pedimos que nos digas el área de dicho cuadrado si utilizas las siguientes unidades, justificando la respuesta.

a) Uno de los triángulos grandes

SOLUCIÓN:

Como el tangram entero –las 7 piezas– equivale a 16 triángulos pequeños, es decir, mide 16 unidades, si tomamos como unidad el triángulo pequeño, y el triángulo grande es cuatro veces el pequeño, cuando la unidad de medida es un triángulo grande la superficie del tangram completo equivale a la de 4 triángulos grandes. por tanto el área con esta unidad es 4.

b) El triángulo mediano

SOLUCIÓN:

Podemos hacerlo de dos modos.

Como sabemos que el tangram completo mide lo que 4 triángulos grandes y el triángulo mediano equivale a la mitad del grande, el área del tangram tomando como unidad el triángulo mediano será el doble de la obtenida en el apartado anterior, o sea, 8 unidades.

O bien, como el tangram completo mide 16 unidades cuando la unidad es el triángulo pequeño, y el triángulo mediano tiene un área doble que el pequeño, el área del tangram tomando como unidad el triángulo mediano es la mitad de 16, que son 8 unidades.

c) El cuadrado

SOLUCIÓN:

Como el cuadrado y el triángulo mediano son figuras *equivalentes* (aunque no sean *congruentes*), tomando una de ellas o la otra como unidad de área, el área de la figura que se mida –en este caso el tangram completo– es la misma.

PROBLEMA 2

A continuación, te presentamos varias conversaciones oídas en plena calle. Para cada una de ellas, di si lo que dicen esas personas es razonable o no lo es. Explica por qué. Puedes poner un ejemplo.

A. Dos amigos se encuentran por la calle después de bastante tiempo y esta es parte de su conversación:

- *¿Y cómo te va? Dicen que has ganado mucho dinero.*
- *Bah, no me puedo quejar.*
- *¿Y cómo lo consigues? Tienes que ser todo un cerebro de los negocios.*
- *No creas, es fácil. Mira, compro a dos y vendo a cuatro. Y con ese dos por ciento voy tirando.*

SOLUCIÓN:

Vende al doble de lo que compra, luego gana un 100 %.

(En realidad estamos ante un ‘distractor de lenguaje’).

B. Un profesor llega un día y dice muy serio a los alumnos:

- *¡Me tenéis contento! El examen fue un desastre, habéis suspendido el setenta y cinco por ciento.*
- Respuesta de un alumno:
- *Imposible profesor. ¡Si no somos tantos!*

SOLUCIÓN:

Han tomado el porcentaje, no como una relación entre cantidades de magnitud, sino en términos absolutos

C. Dos estudiantes universitarios:

- *Vaya, he suspendido. Y eso que memoricé toda la asignatura, palabra por palabra, hasta los puntos y las comas, igualito que en el libro.*
- *¡Pues claro que suspendes! ¿No has oído que estudiar de memoria no garantiza que lo vayas a entender? Esta profe pone exámenes imposibles de aprobar para quien no entiende lo que pone en el libro.*
- *¿Y qué? Eso no quiere decir que tuviera que suspender por estudiar de memoria.*

SOLUCIÓN:

$A \neq B$ no es lo mismo que $A \Rightarrow B$

Que el hecho de que suceda A (estudiar de memoria) no conlleve que necesariamente se haya de cumplir B (aprobar el examen), tampoco obliga a que B no se pueda cumplir.

Es decir, el hecho de que estudiar de una cierta manera no implique que se apruebe con seguridad, no supone tampoco que necesariamente ocurra lo contrario, es decir, que con seguridad no se vaya a aprobar estudiando de ese modo.

PROBLEMA 3

Tenemos un mazo de **16** cartas, numeradas del 1 al 16. Están colocadas ordenadamente de tal forma que la carta con el número 1 está en la parte superior del mazo y la 16 es la carta que está debajo de todas en el paquete. (los números están escritos en la parte posterior de las cartas y no son visibles).



Procedemos de la siguiente manera:

La carta primera (la que está numerada con el 1) se coloca debajo de todas y la siguiente se quita; la que estaba tercera se pasa al final del mazo y la que estaba cuarta se quita y este proceso se repite continuamente, es decir, cuando quitamos una carta, la nueva carta superior de la baraja pasa al final de la baraja y se queda la última, y luego la siguiente de la parte superior se descarta ..., y así hasta que nos quedemos con una sola carta en la mano.

a) ¿Qué número llevará esa carta, la última que tengamos en la mano? Explica de manera razonada tu respuesta.

SOLUCIÓN:

Un modo de hacerlo es escribir los números del 1 al 16 e ir tachando números alternados (como si fueran cartas que se descartan). Se comprueba que la última carta que queda sin descartar es la primera, marcada con el número 1.

b) Y si el mazo tuviese **64** cartas, ¿qué número llevaría la carta que se quede la última en la mano, si actuamos de igual manera que cuando teníamos 16 cartas? Razona la respuesta.

SOLUCIÓN:

Podrían escribirse los números del 1 hasta el 64 y proceder como en el caso anterior, puesto que 64 aún no es un número muy grande. No obstante, al cambiar la variable 'número de cartas', y tratarse de un número grande, se promueve la búsqueda de otras estrategias más generales. Una podría ser esta:

Como 64 es un número par, en la primera 'ronda' nos descartamos las cartas pares, desde la que tiene el número 2 hasta la que tiene el 64, en total 32, y nos quedan otras 32 cartas. Nos queda arriba, por tanto, la carta con el número 1, que nos toca conservar al seguir jugando. Pero 32 también es un número par, por lo que iremos descartando y cuando hayamos descartado la mitad, 16 cartas, nos tocará de nuevo arriba la carta que tiene el número 1. Pero 16 es par, 8 es par, 4 es par, 2 es par... Finalmente, la carta última que no habremos descartado será la que tenía el número 1.

Esto mismo ocurriría partiendo de cualquier número de cartas que sea una potencia de 2, ya que siempre al dividir entre 2 vuelve a quedar un número divisible por 2.

PROBLEMA 4

Apartado A

Tienes que rellenar las casillas del cuadrado con números que, sean múltiplos de 2, o de 3, o de 5 o de varios de ellos, de tal manera que la suma de los números de cada una de las columnas sea 30 y la suma de los números de cada una de las filas sea un múltiplo de 2. No puedes repetir ningún número. Explica cómo lo has resuelto.

PRACTICA:

Escribe aquí tu solución (si sabes otra también la puedes poner):

SOLUCIÓN:

Este es un posible resultado:

20	15	25	60 es múltiplo de 2
4	12	0	16 es múltiplo de 2
6	3	5	14 es múltiplo de 2
30	30	30	

Escribimos los múltiplos de 5, 3 y 2 inferiores a 30. (El 30 no lo podemos usar porque para obtener 30 en una de las columnas los otros dos sumandos tendrían que ser cero).

Múltiplos de 5: 0, 5, 10, 15, 20 y 25

Múltiplos de 3: 0, 3, 6, 9, 12... 27

Múltiplos de 2: 0, 2, 4, 6,... 28

Podríamos proceder de esta manera: colocamos los tres múltiplos de 5 mayores en las casillas de una fila. En el ejemplo, están colocados en la primera. Podemos elegir otros números.

Los números que faltan en las otras dos casillas de cada columna tienen que sumar lo que le falta a 20, a 15 y a 25 para llegar a 30. Comprobaremos que la suma en horizontal nos da un número múltiplo 2, independientemente que sea menor o mayor que 30.

Otro ejemplo:

15	20	25
10	4	2
5	6	3

Apartado B

Observa los números colocados en las casillas del siguiente cuadrado:

1	3	11
5	15	55
7	21	77

a) Elige tres números de los que aparecen en las casillas, de tal modo que cada uno de ellos esté situado en casillas de diferente fila y de distinta columna (entre los tres elegidos tiene que haber de las tres filas y de las tres columnas). Multiplica los tres números que has seleccionado.

SOLUCIÓN:

Por ejemplo, $3 \times 55 \times 7 = 1155$

b) Ahora haz lo mismo con otros tres números elegidos también de la misma forma que en el apartado anterior, ¿qué observas? Intenta averiguar **por qué ocurre esto** y explícalo.

$$11 \times 5 \times 21 = 1155$$

Se obtiene el mismo resultado. La explicación está en cómo se ha construido el cuadrado.

La segunda fila contiene los números de la fila primera, multiplicados por 5.

La tercera fila contiene los números de la primera fila, multiplicados por 7.

La columna segunda es el resultado de multiplicar cada número de la columna primera por 3.

La columna tercera es el resultado de multiplicar cada número de la columna primera por 11.

Ahora imaginemos que los números están descompuestos en factores primos, así:

1	3	11
5	3×5	5×11
7	3×7	7×11

Por tanto, como escogemos un número de cada fila, al multiplicarlos tendremos los factores 5 y 7. Y, del mismo modo, como los números que elegimos son uno de cada columna, al multiplicarlos el producto tendrá los factores 3 y 11. Luego el producto será $5 \times 7 \times 3 \times 11 = 1155$

PROBLEMA 5

En un pueblo pequeño viven 10 familias. La media de bicicletas de los diez hogares es un número **mayor que 2 y menor que 3**.

NOTA: la media, se halla sumando el número de bicicletas de cada familia y dividiendo el resultado por el número de familias.

Lee cada una de las afirmaciones y responde a lo que se pide.

a) «Todas las familias tienen 2 bicicletas o 3».

Escribe si es verdadero o falso:

Si piensas que es verdadero, pon un ejemplo, y si creyeras que no es posible, pon un ejemplo en el que no ocurra esto.

Familias	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Media
N.º de hijos											

b) ¿Puede ser que una sola familia tenga 20 bicis y que la media de las diez familias sea mayor que 2 y menor que 3?

Escribe SÍ, si crees que es posible y NO, en caso contrario:

Si piensas que sí, pon un ejemplo, y si creyeras que no es posible, pon un ejemplo en el que no ocurra esto.

Familias	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Media
N.º de hijos											

c) Si una de las familias tiene 30 bicicletas, ¿podría ser la media mayor que 2 y menor que 3?

Escribe SÍ si crees que es posible y NO, en caso contrario:

Si piensas que sí, pon un ejemplo, y si creyeras que no es posible, pon un ejemplo en el que no ocurra esto.

Familias	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Media
N.º de hijos											

SOLUCIÓN:

Si la media es un número estrictamente mayor que 2 y estrictamente menor que 3 (como se indica), teniendo en cuenta que la media se calcula sumando el número total de bicis de las diez familias y dividiendo entre 10, deducimos que entre las diez familias tienen más de 20 y menos de 30 bicis.

Además, por tratarse de bicis, la cantidad que corresponde a cada familia ha de ser un número entero. Así que cada familia tiene una cantidad de bicis que puede ir desde 0 hasta 29 (otra cosa es que no parezca muy creíble que una familia tenga un número de bicis exagerado, pero teóricamente podría ocurrir).

Con esto, podemos responder a los diferentes apartados:

a) FALSO. Contraejemplo:

Familias	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
N.º de bicis	0	0	0	1	1	4	5	3	2	6

