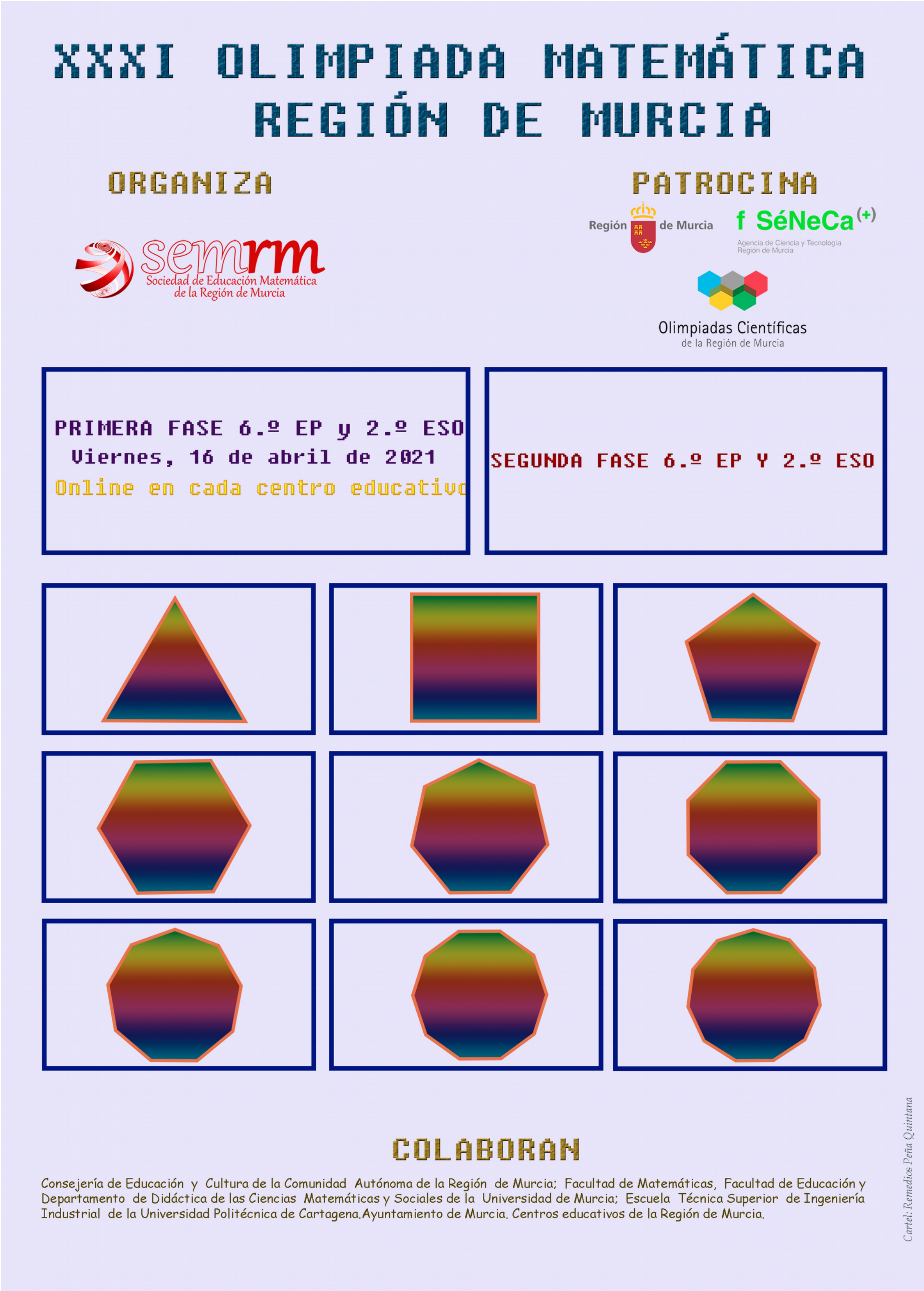
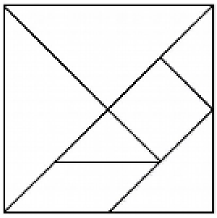


PROBLEMAS PROPUESTOS Y SOLUCIONES - 2.ª FASE

Segundo curso de ESO 15 de mayo de 2021

PROBLEMA 1

Te presentamos un TANGRAM. Se trata de un rompecabezas geométrico compuesto por 7 piezas: dos triángulos pequeños, un triángulo mediano, un cuadrado, un paralelogramo y dos triángulos grandes.



Las relaciones entre los tamaños de las diferentes piezas es tal que permite numerosas uniones entre ellas. ***Dispones sobre tu mesa de un tangram igual a este.***

a) El área del paralelogramo es 10 cm², ¿cuál será el área de las siete figuras juntas?

SOLUCIÓN:

Como se puede observar manipulando el tangram, la relación entre los tamaños de las piezas del tangram es la siguiente: el triángulo, el cuadrado y el otro paralelogramo son *equivalentes* entre sí, y el área de cada uno de ellos es la misma que la de dos triángulos pequeños; cada triángulo grande equivale a dos medianos o a cuatro pequeños.

Por tanto, el área de las siete figuras es igual a la de 4+4+2+2+2+1+1=16 triángulos pequeños, o sea, a 8 paralelogramos, 80 cm².

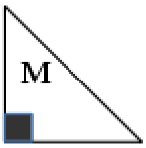
b) Consideramos que el área del triángulo pequeño es 1. Se trata de dibujar cuadriláteros convexos[1] de área 4.

- Intenta construirlos todos y dibújalos en la parte de atrás del folio. ¿Cuántos hay?

IMPORTANTE: Dos polígonos se consideran iguales si tienen la misma forma y tamaño y están formados por las mismas piezas unidas entre sí de igual manera, aunque estén girados o sean simétricos.

Para hacer los dibujos no hace falta usar la regla, pero intenta respetar las formas y las proporciones. Para que quede claro qué piezas dibujas y cómo se unen unas a otras, cuando dibujes los cuadriláteros formados por varias piezas

has de indicar, en cada triángulo si es grande (G), mediano (M) o pequeño (P) y marcar todos los ángulos rectos. Ejemplo:



- ¿Puedes explicar por qué no hay más cuadriláteros de área 4?

SOLUCIÓN:

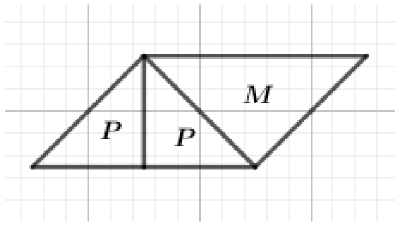
Primero se ve con qué piezas se podrían construir polígonos de área 4:

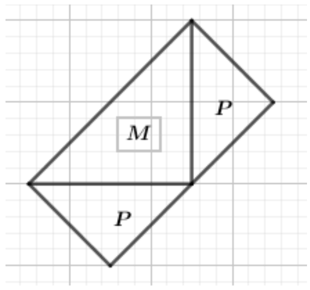
- Las únicas piezas de área 4 son triángulos, por lo que se descartan.

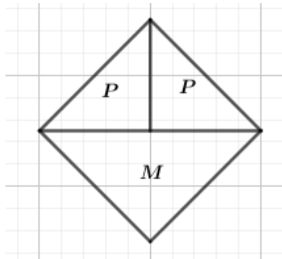
1 *Un polígono es convexo si cualquier segmento que une dos puntos cualesquiera que estén dentro del polígono, está también dentro, es decir, el segmento no corta los lados. En un polígono convexo, todos los vértices "apuntan" hacia el exterior del polígono. Ejemplos:*

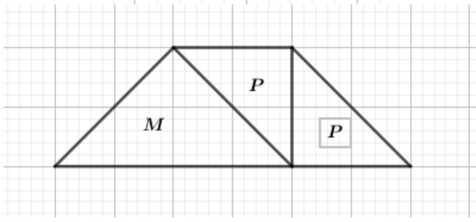
Polígono convexo *Polígono cóncavo*

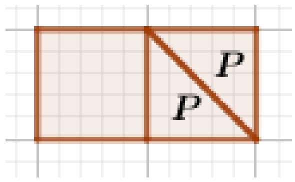
- Hay dos opciones: dos piezas de área 2 o una de área 2 y dos de área 1. Las **12 posibilidades** se muestran a continuación:

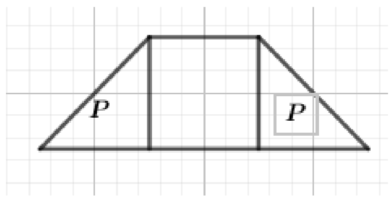
<table>
<tr>
<td>Los dos triángulos pequeños y el mediano</td>
<td>⟶</td>
<td>4 figuras: un cuadrado, un paralelogramo, un rectángulo y un trapecio isósceles.</td>
<td>


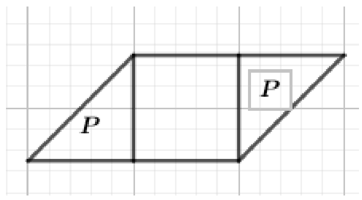




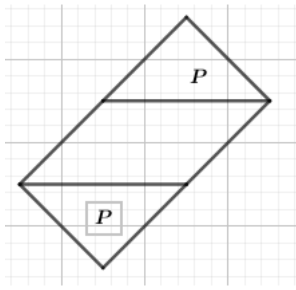
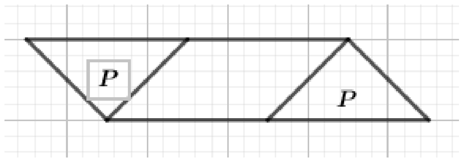
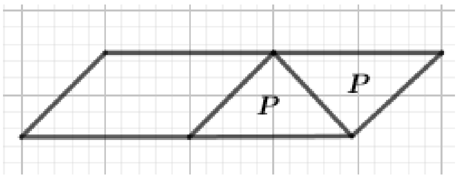
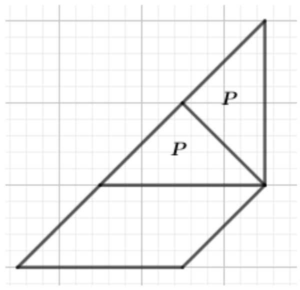
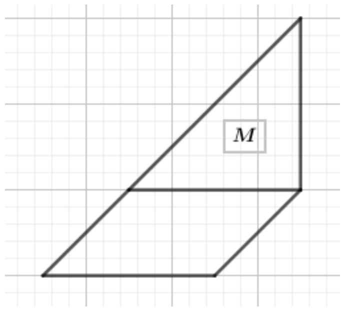


</td>
</tr>
<tr>
<td>Los dos triángulos pequeños y el cuadrado</td>
<td>⟶</td>
<td>3 figuras: rectángulo, trapecio isósceles y paralelogramo</td>
<td>






</td>
</tr>
</table>

Los dos triángulos pequeños y el paralelogramo	⟶	**4 figuras**: rectángulo, 2 paralelogramos (con el mismo contorno, pero con las piezas dispuestas de diferente forma)y trapecio isósceles	   
El cuadrado y el paralelogramo	⟶	No se puede formar un cuadrilátero convexo	
El cuadrado y el triángulo mediano	⟶	No se puede formar un cuadrilátero convexo	
El paralelogramo y el triángulo mediano	⟶	**1 figura**: trapecio isósceles	

PROBLEMA 2

A continuación, te presentamos varias conversaciones oídas en plena calle. Para cada una de ellas eplica si lo que dicen esas personas es razonable o no lo es. Puedes poner un ejemplo.

A. Dos amigos se encuentran por la calle después de bastante tiempo y esta es parte de su conversación:

- *¿Y cómo te va? Dicen que has ganado mucho dinero.*
- *Bah, no me puedo quejar.*
- *¿Y cómo lo consigues? Tienes que ser todo un cerebro de los negocios.*
- *No creas, es fácil. Mira, compro a dos y vendo a cuatro. Y con ese dos por ciento voy tirando.*

SOLUCIÓN:

Vende al doble de lo que compra, luego gana un 100 %.

(En realidad estamos ante un 'distractor de lenguaje').

B. Un profesor llega un día y dice muy serio a los alumnos:

- *¡Me tenéis contento! El examen fue un desastre, habéis suspendido el setenta y cinco por ciento.*
- Respuesta de un alumno:
- *Imposible profesor. ¡Si no somos tantos!*

SOLUCIÓN:

Han tomado el porcentaje, no como una relación entre cantidades de magnitud, sino en términos absolutos.

C. Dos jubilados están hablando:

- *Espero que sea verdad que «Desgraciado en el juego, afortunado en amores», porque ayer jugué al parchís toda la tarde y no gané ninguna partida, ni siquiera jugaba apenas, porque para empezar a jugar hay que sacar un cinco y a mí, cada vez que tiraba el dado, me salía otro número.*
- *Pues diles que te dejen tirar el dado dos veces, cada vez que te toque, y así tienes el doble de probabilidad de que te salga un cinco.*

SOLUCIÓN:

La probabilidad de sacar un cinco tirando el dado una vez es 1/6 y haciéndolo dos veces es $1-\frac{25}{36}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

(El error en el razonaniento se debe a un uso no pertinente de las propiedades de 'linealidad').

D. Dos estudiantes universitarios:

- *Vaya, he suspendido. Y eso que memoricé toda la asignatura, palabra por palabra, hasta los puntos y las comas, igualito que en el libro.*
- *¡Pues claro que suspendes! ¿No has oído que estudiar de memoria no garantiza que lo vayas a entender? Esta profe pone exámenes imposibles de aprobar para quien no entiende lo que pone en el libro.*
- *¿Y qué? Eso no quiere decir que tuviera que suspender por estudiar de memoria.*

SOLUCIÓN:

A $\nRightarrow$ B no es lo mismo que A $\Rightarrow$ no B

Es decir, el hecho de que estudiar de una cierta manera no implique que se apruebe con seguridad, no supone tampoco que necesariamente ocurra lo contrario, es decir, que no se vaya a aprobar.

<u>PROBLEMA 3</u>

Tenemos un mazo de **32** cartas, numeradas del 1 al 32. Están colocadas ordenadamente de tal forma que la carta con el número 1 está en la parte superior del mazo y la 32 es la carta que está debajo de todas en el paquete. L*os números están escritos en la parte posterior de las* cartas y no son visibles.

Procedemos de la siguiente manera:

La carta primera (la que está numerada con el 1) se coloca debajo de todas y la siguiente se quita del mazo de cartas; la que estaba tercera se pasa al final del mazo y la que estaba cuarta se quita. Esto mismo se repite continuamente, es decir, la nueva carta superior del mazo pasa al final del mazo y se queda la última, y luego la siguiente se descarta en la mesa… Y así hasta que nos quedemos con una sola carta en la mano.

a) ¿Qué número llevará esa carta? Explica de manera razonada tu respuesta.

<u>SOLUCIÓN</u>:

Un modo de hacerlo es escribir los números del 1 al 32 e ir tachando números alternados (como si fueran cartas que se descartan). Se comprueba que la última carta que queda sin descartar es la primera, marcada con el número 1.

b) Y si el mazo tuviese **512** cartas, ¿qué número llevaría la carta que se quede la última en la mano, si actuamos de igual manera que cuando teníamos 32 cartas? Razona la respuesta.

<u>SOLUCIÓN</u>:

Al cambiar la variable 'número de cartas', y tratarse de un numero grande, se promueve la búsqueda de otras estrategias más generales. Una podría ser esta:

512 es una potencia de 2, pues $512 = 2^9$. Esto supone que cuando nos quedamos con la primera carta, descartamos la segunda, conservamos la tercera, descartamos la cuarta… Descartamos *exactamente la mitad* de las cartas, y nos quedamos con $2^8 = 256$ cartas al final de la primera ronda. Concretamente, conservamos las que tienen un número impar. En particular, descartamos la última que hubiera en el mazo. Por tanto, en la segunda ronda empezamos conservando la carta con el 1.

Ahora tenemos 256 cartas –la primera de ellas con el número 1–. Empezamos conservando la del 1 y, tras descartar alternativamente la mitad, habremos descartado también la que estuviera la última en el mazo, por lo que tendremos 128 cartas. Y de nuevo en la siguiente ronda nos toca conservar la del 1 e ir descartando la siguiente…
De ese modo iremos teniendo sucesivamente este número de cartas: 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1. Y como siempre que empezamos nueva ronda de descarte, habíamos descartado la última carta, por haber un número par de ellas en cada ronda, siempre conservamos la primera. Así que la última carta que tendremos en la mano es la que estaba en primera posición, numerada con el 1.

PROBLEMA 4

Observa estos dos ejemplos de una propiedad curiosa:

55 x 40 = 50 x 44

33 x 40 = 30 x 44

a) Comprueba esta propiedad usando otros números:

SOLUCIÓN:

Por ejemplo: 44 x 30 = 40 x 33

11 x 80 = 10 x 88

99 x 50 = 90 x 55, etc.

c) ¿Será cierto que pasa siempre esto, aunque cambiemos los números 5 y 4 del primer ejemplo, o los números 3 y 4 del segundo ejemplo, por otros números? Intenta redactar esta propiedad con tus palabras, como si fuera para ponerla en un libro y que otra persona la entienda.

SOLUCIÓN:

Una manera puede ser:

«Multiplicar un número formado por dos cifras iguales por otro número de dos cifras acabado en cero, da el mismo resultado que multiplicar un número acabado en cero [con la cifra de las decenas igual a las del primero de los números anteriores], por otro número de dos cifras iguales [a la cifra de las decenas del número que acababa en cero]».

Otro modo sería:

«Se puede transformar el producto de un número de dos cifras que sea multiplo de once por otro número de dos cifras que sea un múltiplo de diez, en un producto de un múltiplo de diez por un múltiplo de once, intercambiando los dígitos diferentes de cero en ambos números».

(El primer enunciado se basa en la escritura decimal y el segundo alude a propiedades de divisibilidad, sin considerar el valor de posición).

c) ¿Sabrías escribir la propiedad, pero con letras, como si fuera una fórmula?

SOLUCIÓN:

mm x n0 = m0 x nn   siendo m y n números coprendidos entre 1 y 9

d) Explica razonadamente por qué se cumple esa propiedad.

El número escrito en nuestro sistema de numeración en la forma du (d decenas y u unidades) equivale a 10d + u unidades. Por tanto, tenemos que los productos aa x b0 y a0 x bb equivalen, respectivamente, a:

(10 m + n) x 10n = 100mn + 10mn = 110mn
10m x (10n + n) = 100 mn + 10mn = 110mn

Si consideramos la propiedad enunciada de la segunda manera que propusimos en el apartado a), tenemos que:

11m x 10n = 10m x 11n = 110 mn

PROBLEMA 5

I. En un pueblo pequeño viven 10 familias. La media de bicicletas de los diez hogares en un número **mayor que 2 y menor que 3.**

> **NOTA:** la media, se halla sumando el número de bicicletas de cada familia y dividiendo el resultado por el número de familias.

Lee cada una de las afirmaciones y responde a lo que se pide.

a) «Todas las familias tienen 2 bicicletas o 3».

Escribe si es verdadero o falso:

Si piensas que es verdadero, pon un ejemplo y si creyeras que no es posible, pon un ejemplo en el que no ocurra esto.

Familias	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
N.º de bicis										

b) ¿Puede ser que una sola familia tenga 20 bicis y que la media de las diez familias sea mayor que 2 y menor que 3?

Escribe Sí, si crees que es posible y NO, en caso contrario:

Si piensas que sí, pon un ejemplo y si creyeras que no es posible, pon un ejemplo en el que no ocurra esto.

Familias	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
N.º de bicis										

c) Si una de las familias tiene 30 bicicletas, ¿podría ser la media mayor que 2 y menor que 3?

Escribe Sí, si crees que es posible y NO, en caso contrario:

Si piensas que sí, pon un ejemplo y si creyeras que no es posible, pon un ejemplo en el que no ocurra esto.

Familias	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
N.º de bicis										

SOLUCIÓN:

Si la media es un número estrictamente mayor que 2 y estrictamente menor que 3 (como se indica), teniendo en cuenta que la media se calcula sumando el número total de bicis de las diez familias y dividiendo entre 10, deducimos que entre las diez familias tienen más de 20 y menos de 30 bicis.

Además, por tratarse de bicis, la cantidad que corresponde a cada familia ha de ser un número entero. Así que cada familia tiene una cantidad de bicis que puede ir desde 0 hasta 29 (otra cosa es que no parezca muy creíble que una familia tenga un número de bicis exagerado, pero teóricamente podría ocurrir).

Con esto, podemos responder a los diferentes apartados:

a) FALSO. Contraejemplo:

Familias	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
N.º de bicis	0	0	0	1	1	4	5	3	2	6

b) SÍ. Ejemplo:

Familias	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
N.º de bicis	20	1	2	1	1	1	1	0	0	0

c) NO. Si una familia tiene 30, la suma de las diez es mayor o igual que 30, por lo que la media será mayor o igual que 3. Ejemplo:

Familias	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
N.º de bicis	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0

II. Ahora, una situación diferente a la anterior.

Nos dicen que la media de bicicletas por hogar es **mayor que 1,5 pero menor que 2.**

- **¿Es cierto que ha de haber más hogares con 2 bicicletas que con 1?** …

Escribe Sí, si crees que es posible y NO, en caso contrario:

Razona la respuesta.

SOLUCIÓN:

NO, lo único que ha de cumplirse es que entre las diez familias tengan al menos 16 bicis y no tengan todas juntas más de 19. Pero podría ser que una sola familia tuviera un número de bicis que fuera desde 16 a 19.

- **¿Puede ser que en todos los hogares de ese pueblo haya exactamente el mismo número de bicis?**

Escribe Sí, si crees que es posible y NO, en caso contrario.

Razona la respuesta.

SOLUCIÓN:

NO. Ya que ninguno de los números comprendidos entre 16 y 19 es múltiplo de 10. si todas tuvieran el mismo número de bicis, llamémosle n, la media sería $10n/n = n$. Por tanto, debería ser n un número entero.

- Conchi quiere saber cuál es la media de bicicletas en los diez hogares y lo ha buscado en dos páginas de internet. Pero en cada una pone un número:

1,6 1,75

Pero no importa porque ella, <u>solo con fijarse en estos números</u>, sabe cuál tiene que estar equivocado y cuál puede ser el correcto.

Explica cómo puede saberlo.

<u>SOLUCIÓN</u>:

La media es 1,6.

Explicación: el total de bicis de las 10 familias es un número entero, luego al dividir por 10 solo puede tener una cifra decimal.

O también: si la media fuese 1,75 entonces el total de bicis entre los diez hogares sería diez veces esa cantidad, o sea, 17,5 bicicletas, lo cual es absurdo.