

OLIMPIADA XXVIII SEGUNDO ESO REGIONAL SOLUCIONES

PROBLEMA 1

En la siguiente tabla tenemos un resumen de los descendientes reales de una perra.

Perra de 1 año	1.º semestre		2.º semestre		3.º semestre		4.º semestre		5.º semestre		6.º semestre		TOTALES
	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	
Parto 1	4	2	0	0	16	8	16	8	16	8	16	8	102
							0	0	64	32	64	32	192
									0	0	64	32	96
Parto 2			4	2	0	0	16	8	16	8	16	8	78
									0	0	64	32	96
Parto 3					4	2	0	0	16	8	16	8	54
Parto 4							4	2	0	0	16	8	30
Parto 5									4	2	0	0	6
Parto 6											4	2	6
Totales	6		6		30		54		174		390		660

Partimos de una perra que tiene 1 año. A lo largo de los tres años completos habrá parido 6 veces y en cada uno de los partos tendrá 6 cachorros: 4 hembras (H) y 2 machos (M).

Primer parto:

Estas primeras 4 hembras, nacidas a principios de enero del primer semestre no parirán hasta que alcancen 1 año de edad (3.º semestre), teniendo en cada parto 16 hembras (4 x 4) y 8 machos (4 x 2). En total, hasta finalizar el tercer año, habrán parido 4 veces.

Las 16 hembras del tercer semestre parirán 2 veces (en el 5.º y 6.º semestre). Darán lugar a 64 hembras (16 x 4) y 32 machos (16 x 2) en cada uno de los semestres. Las 16 hembras del 4.º semestre solo parirán 1 vez y, al igual que las anteriores, parirán 64 hembras y 32 machos. Así pues, en total **habrán nacido 390 perritos**.

Segundo parto:

En el segundo parto (acaecido en el 2.º semestre) tendrá otros 6 cachorros, 4 hembras y 2 machos, las cuales se reproducirán 3 veces hasta llegar a finales del tercer año, dando lugar a 16 hembras y 8 machos en cada uno de los semestres.

Solo las 16 hembras nacidas en el 4.º semestre les dará tiempo a reproducirse 1 vez, naciendo otras 64 hembras y 32 machos. **En total nacerán 174 cachorros**.

Tercer parto:

Las 4 hembras nacidas en el tercer semestre se reproducirán 2 veces (16 hembras y 8 machos cada vez). No hay nuevas reproducciones. **En total, tendremos 54 nuevos animales.**

Cuarto parto:

Las 4 hembras nacidas en el 4.º semestre, solo se reproducen 1 vez y darán lugar a 16 hembras y 8 machos. **En total, 30 perritos más.**

Quinto y sexto partos:

En el 5.º y 6.º semestres, solo contamos con los 6 cachorros que pare la primera perra, es decir **12 animales nuevos en total**, ya que no llegan a alcanzar la edad fértil en el período estudiado.

Sumando los animales nacidos a lo largo de tres años, 660, vemos que el número sugerido en el enunciado del problema es bastante superior al número real de descendientes.

PROBLEMA 2

Apartado A

Observación: Asumimos que las medidas tomadas sobre la caja pueden variar algún mm. Por tanto, el resto de las medidas calculadas a partir de ellas y los resultados también podrían hacerlo.

Para hallar el área total de la caja podemos proceder de formas muy variadas. Una de ellas sería:

- **Área lateral.** Observamos que el desarrollo **lateral de la caja** es un rectángulo, ya que sus ángulos son rectos y, aunque las bases tengan distinta forma, sus perímetros miden lo mismo.

Medidas:

Perímetro de la base = 25,6 cm

Altura = 15,60 cm

$$\text{Área lateral} = 25,6 \times 15,8 = \mathbf{404,48 \text{ cm}^2}$$

- **Área de la base hexagonal.** Al ser irregular la dividimos por la mitad (en sentido horizontal) y nos da dos trapecios iguales.

Medidas:

Base mayor del trapecio = 9 cm

Base menor = 5 cm

Altura = 3,25 cm

$$\text{Área de la base hexagonal} = (9 + 5) \times 3,25 = \mathbf{45,5 \text{ cm}^2}$$

- **Área de la base rectangular.**

Medidas:

Base = 7,8 cm

Altura = 5 cm

Área de la base rectangular = $7,8 \times 5 = 39 \text{ cm}^2$

Área total = $404,48 + 45,5 + 39 = 488,98 \text{ cm}^2$

Otra forma de hallar el área lateral sería:

Observamos que el área lateral está formada por 8 trapecios rectángulos: 4 situados en los laterales y otros 4 que se obtienen al dividir por la mitad los 2 trapecios isósceles de las caras anterior y posterior.

Medidas:

Base menor = 2,5 cm

Base mayor = 3,9 cm

Altura = 15,8 cm

Área de un trapecio = $(2,5 + 3,9) \times 15,8 / 2 = 50,56 \text{ cm}^2$

Área lateral = $50,56 \times 8 = 404,48 \text{ cm}^2$

Como el área de las 2 bases las tenemos ya calculadas,

Área total = $404,48 + 45,5 + 39 = 488,98 \text{ cm}^2$

Apartado B

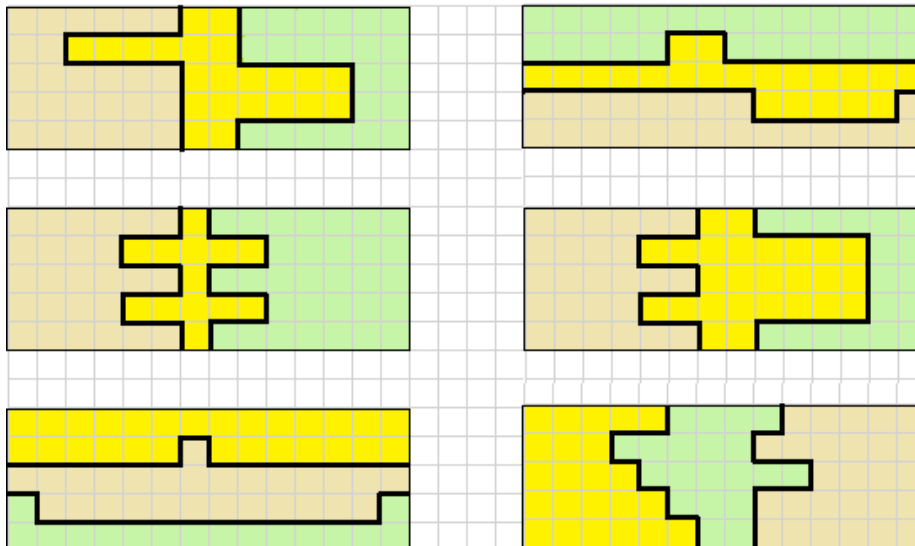
VOLUMEN. Una forma de hallarlo aproximadamente sería calculando la media entre el volumen de un prisma de base hexagonal y el volumen de otro prisma de igual altura, cuya base fuese un rectángulo. Como la altura mide 15,8 cm, el volumen aproximado sería:

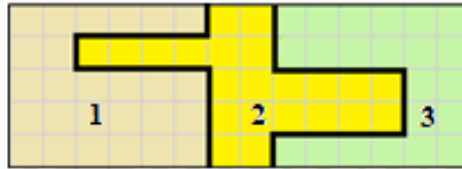
Volumen total = $(45,5 \cdot 15,8 + 39 \times 15,8) / 2 = 15,8 (45,5 + 39) / 2 = 667,55 \text{ cm}^3$

PROBLEMA 3

Apartado A

Hay infinidad de soluciones. A título de ejemplo damos las siguientes:





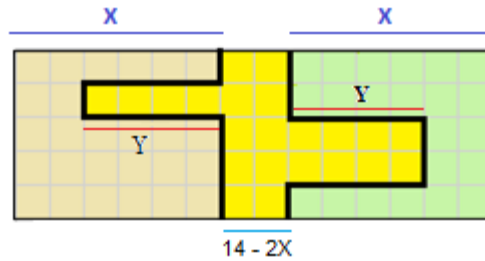
Comprobamos los perímetros de los tres polígonos del primer ejemplo:

$$P1 = 10 + 12 + 8 = 30 \text{ unidades}$$

$$P2 = 10 + 16 + 4 = 30 \text{ unidades}$$

$$P3 = 10 + 12 + 8 = 30 \text{ unidades}$$

Se pueden hallar muchísimas soluciones procediendo por ensayo error, mejor aún si se hace de manera algo sistemática. Pero recurrir al álgebra puede ayudar a hallar las soluciones. Por ejemplo, si las buscamos en aquellas en que las líneas poligonales divisorias tengan solo un “asa” y además hay cierto “parecido” en las porciones no centrales como en el siguiente ejemplo podemos plantear una ecuación.



Para que los tres perímetros sean iguales la ecuación sería:

$$2x + 5 + 5 + 2y = 2(14 - 2x) + 5 + 5 + 4y \quad \text{de donde } y = 3x - 14$$

Teniendo en cuenta que tanto x como y deben ser menores de 7 (x, y enteros) hay dos soluciones:

$$x = 6 \quad y = 4 \quad (\text{la solución dibujada})$$

$$x = 5 \quad y = 1 \quad (\text{en este caso las “aberturas” podrían estar ordenadas hacia el mismo lado}).$$

Cambiando la altura de los segmentos verticales de la recta quebrada, tendríamos varias soluciones como la dibujada (las indicamos mediante ternas de números con las longitudes de los segmentos verticales de las poligonales):

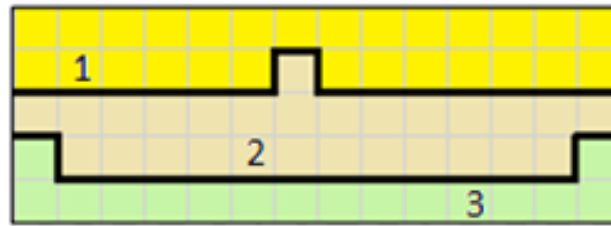
(1,1,3), (1,2,2), (1,3,1), (2,1,2), (2,2,1), (3,1,1). Hay seis casos para $x = 6, y = 4$ o sea, combinando ambos lados, **$6^2 = 36$ posibilidades.**

Para $x = 5, y = 1$, como las “aberturas” podrían estar orientadas hacia el mismo lados o no, habría 12 para cada lado, total **$12^2 = 144$ posibilidades.**

Del mismo modo, pueden plantearse ecuaciones que permiten averiguar cuántas soluciones hay según la orientación de las poligonales y el número de “asas”, además de la mayor o menor simetría de las soluciones. Esto arroja un número de soluciones enorme.

Apartado B

Calculamos el área de las tres partes en las que hemos dividido, por ejemplo, el siguiente rectángulo:



Área del polígono 1 = 27 unidades cuadradas

Área del polígono 2 = 27 unidades cuadradas

Área del polígono 3 = 16 unidades cuadradas

Como podemos observar no tienen la misma superficie.

Es imposible conseguir tres partes con la misma superficie, ya que las tres deben venir expresadas por un número entero y el área del rectángulo es de 70 unidades cuadradas, que no es múltiplo de 3.

Apartado C:

Cada triángulo tiene de lados 5, 12 y 13 (terna pitagórica) y el paralelogramo tiene de lados 2 y 13, luego ambos perímetros son, respectivamente, $5 + 12 + 13$ y $2 + 13 + 2 + 13$, es decir, en ambos casos el perímetro es 30.

